ΣΤΑ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΑ ΚΕΦΑΛΑΙΑ...

- $x_\nu = (x_\nu^{(1)}, \dots, x_\nu^{(n)}) \longrightarrow x_0 = (x_0^{(1)}, \dots, x_0^{(n)})$
  $\|x_\nu - x_0\| \to 0 \iff x_\nu^{(i)} \longrightarrow x_0^{(i)}, \ \forall i = 1,2,\dots,n$
- $f: U \to \mathbb{R}, \ U \subseteq \mathbb{R}^n$, f συνεχής στο $x_0 \in U \iff$
  $\iff \forall x_\nu \to x_0$ ισχύει $f(x_\nu) \to f(x_0)$
- $f: U \to \mathbb{R}^m, \ U \subseteq \mathbb{R}^n$, f συνεχής στο $x_0 \in U \iff$
  $\iff f_j$ συνεχής στο x_0 $\forall j = 1,2,\dots,m$, $f = (f_1, \dots, f_m)^T$
- $f: U \to \mathbb{R}$: $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + h, x_{i+1}, \dots x_n) - f(x)}{h}$

- f διαφορίσιμη στο $x \iff \exists \ \nabla f(x) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x)\right)$
  και $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - (f(x) + \nabla f(x) \cdot h)}{\|h\|} = 0$

  (Ικανή συνθήκη
  $f \in C^1(U) \iff \forall i = 1,2,\dots n$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}: U \to \mathbb{R}$)
- $f: U \to \mathbb{R}^m$ διαφορίσιμη στο $x \iff \forall j = 1, \dots m$
  $f_j: U \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη στο x $f = (f_1, \dots, f_m)^T$.

Επίσης, είδαμε ότι για την $h(x,y) = x \cdot y \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, (x,y) \neq (0,0)$, $h(0,0) = 0$
$h \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ και $h \in C^1(\mathbb{R}^2)$ με
$\nabla h(0,0) = Dh(0,0) = (0,0)$ άρα $\exists \dfrac{\partial h}{\partial x}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\exists \dfrac{\partial h}{\partial y}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
Υπολογίζουμε τις παραγώγους δεύτερης τάξης
$\left(\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}, \dfrac{\partial^2 h}{\partial y^2}\right)$ και παρατηρούμε ότι:

$(\forall (x,y) \neq (0,0)$: $\dfrac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}(x,y) = \dfrac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(x,y)$
ενώ για
$(x,y) = (0,0)$: $\exists \dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}(0,0) = 0 = \dfrac{\partial^2 h}{\partial y^2}(0,0)$
και
$\dfrac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}(0,0) = -1$, $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$)

Αλλά οι συναρτήσεις
$\dfrac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ και $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ασυνεχείς στο $(0,0)$
δηλαδή
$\Downarrow$
$$h \notin C^2(\mathbb{R}^2)$$

ΘΕΩΡΗΜΑ (SCHWARTZ):

Έστω $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^2$ ανοικτό με $f \in C^2(U)$

Τότε $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j x_i} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} : U \to \mathbb{R}$ $\forall i, j = 1, 2, \dots, n$.

ΘΕΩΡΗΜΑ (και πολυώνυμο) Taylor για πραγματικές συναρτήσεις πολλών μεταβλητών.

ΟΡΙΣΜΟΙ / ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ

α) Ένα διάνυσμα $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ ονομάζεται πολυδείκτης δηλαδή $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ με $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$, έχει μήκος $|\alpha| \overset{\text{ορ.}}{=} \alpha_1 + \dots + \alpha_n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$

Επίσης $\alpha! \overset{\text{ορ.}}{=} (\alpha_1!)(\alpha_2!) \cdots (\alpha_n!)$

Άρα, $\alpha_i! = \alpha_i(\alpha_i - 1) \cdots 2 \cdot 1$, $0! \overset{\text{ορ}}{=} 1$

Τέλος, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ τότε $x^\alpha \overset{\text{ορ.}}{=} x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$ και αν $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό είναι $|\alpha|$ φορές μερικώς διαφορίσιμη στο $x \in U$ και γράφουμε:

$$\boxed{D^\alpha f(x) \overset{\text{ορ.}}{=} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} f(x)}$$

β) Συμβολισμοί Landau

Έστω $g: B(0, \varepsilon) \to \mathbb{R}$, $B(0, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ με $B(0, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < \varepsilon\}$. Τότε γράφουμε

$g(h) = o(\|h\|^k)$ για $h \to \infty$ $k \in \mathbb{N}_0$

$\overset{\text{ορ.}}{\iff} \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{g(h)}{\|h\|^k} = 0$ (προσέγγιση τάξης "μικρό ο" του $\|h\|^k$)

και $g(h) = O(\|h\|^k)$ $h \to 0$ $\iff \dfrac{g(h)}{\|h\|^k} \le C$ $\forall h \in B(0, \varepsilon) \setminus \{\vec{0}\}$ για κάποιο $C \geq 0$ (προσέγγιση τάξης "μεγάλο Ο").

ΘΕΩΡΗΜΑ (TAYLOR).

Έστω $f \in C^k(U)$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτό, $k \in \mathbb{N}_0$ τότε

$\forall x \in U : f(x+h) = \sum\limits_{|\alpha| \le k} \dfrac{D^\alpha f(x)}{\alpha!} h^\alpha + o(\|h\|^k)$, $h \to \infty$

Πολυώνυμο Taylor βαθμού k της f στο x με $\sum\limits_{|\alpha| \le k} = \sum\limits_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}_0^n \\ |\alpha| \le k}}$

Στην περίπτωση όπου $k=2$ το πολυώνυμο Taylor βαθμού 2 της f στο x είναι το

$$\sum_{|\alpha|\leq 2} \frac{D^{\alpha} f(x)}{\alpha!} \eta^{\alpha} = \sum_{m=0}^{2} \sum_{|\alpha|=m} \frac{D^{\alpha} f(x)}{\alpha!} \eta^{\alpha}$$

- $m=0$

$|\alpha| = a_1 + \dots + a_n = 0 \Rightarrow a = (0, \dots, 0) \Rightarrow D^{a} f(x) = \dfrac{\partial^{|a|} f(x)}{\partial x_1^{a_1} \cdots \partial x_n^{a_n}}$

$\underset{a=0}{=} f(x)$, $a! = (0,0,\dots,0)! = 0! \cdots 0! = 1$

$\eta^{a} = \eta_1^{a_1} \cdots \eta_n^{a_n} = \eta_1^{0} \cdots \eta_k^{0} = 1 \cdots 1 = 1$

Άρα, $\displaystyle\sum_{|a|=0} \frac{D^{a} f(x)}{a!} \eta^{a} = f(x)$

- $m=1$

$|a| = a_1 + \dots + a_n = 1 \Rightarrow a = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) = e_i, \ i=1,\dots,n$

$$\Rightarrow \sum_{|a|=1} \frac{D^{a} f(x)}{a!} \eta^{a} = \sum_{i=1}^{n} \frac{D^{e_i} f(x)}{e_i!} \eta^{e_i}$$

όπου

$e_i! = (0, \dots, 1, 0, \dots, 0) = 0! \cdots 0! \cdots 1! \cdots 0! = 1$

$\eta^{e_i} = \eta_1^{0} \cdot \eta_2^{0} \cdots \eta_i^{1} \cdots \eta_n^{0} = \eta_i$

$D^{e_i} f(x) = \dfrac{\partial^{|e_i|} f(x)}{\partial x_1^{0} \cdots \partial x_i^{1} \cdots \partial x_n^{0}} = \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}$

$$\sum_{|a|=1} \frac{D^{a} f(x)}{\alpha!} \eta^{a} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \eta_i = \nabla f(x) \cdot \eta$$